

RIMS Workshop

Algebraic Number Theory and Related Topics

(ver. 20201124)

Organizers:

Iwao Kimura (University of Toyama)

Shinichi Kobayashi (Kyushu University)

Date: **November 30 (Mon)– December 4 (Fri)**, 2020

Place: Research Institute for Mathematical Sciences (RIMS), Kyoto University + Zoom

Everyone but speakers, chairpersons, and program committee attends through Zoom.

November 30 (Mon)

11:05 – 11:10 Introduction

11:10 – 12:00 **Toshiki Matsusaka*** (Nagoya University)

Recent developments on cycle integrals and mock modular forms

In 2009, Kaneko introduced the “value” of the elliptic modular j -function at each real quadratic irrationality. This “value” is defined as an integral of $j(\tau)$ on a closed geodesic on $SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$. Now, such an object is called a cycle integral, and has been studied generally by using mock modular forms. In this talk, I will give an overview of the recent works on the cycle integrals by Duke-Imamoğlu-Tóth, a research group of Bringmann, and the speaker.

13:30 – 14:20 **Ryutaro Sekigawa** (Tokyo University of Science)

Relative power integral bases for cyclic extensions

「代数体 K の整数環 O_K が有理整数環上 1 元生成であるか」という冪整基底問題 (Hasse の問題) は古くから続く未解決問題である。

相対代数体 K/F においても、同様に相対冪整基底問題 (O_K が O_F 上 1 元生成であるか) が考えられている。この分野の研究では、Baker の定理などの解析的な手法が比較的良好に用いられている。

今回、単数群やその Galois コホモロジーなどを用いた”代数的な”手法による進展があったので紹介したい。具体的には

- 虚二次体上の射類体における”Schertz の例外族”のうち、幾つかの具体例での判定
- \mathbf{Q} 上 3 次拡大の場合の必要十分条件の整理 (加塩氏との共同研究)
- 陸名の生成多項式が与える素数次巡回拡大に対する十分条件と、相対冪整基底を持つ無限族の構成

などを紹介する。

14:40 – 15:30 **清水陵嗣** (数理解析研究所)

制限分岐版ノイキルヒ・内田の定理について

遠アーベル幾何学における基本的な結果として、ノイキルヒ・内田の定理: 「 $i = 1, 2$ に対して、 K_i を数体とし、 K_i の絶対ガロア群を G_{K_i} と書く。 G_{K_1} と G_{K_2} が同型の時 K_1 と K_2 が同型である。」が知られている。ノイキルヒ・内田の定理の次のような一般化: 「 $i = 1, 2$ に対して、 K_i, S_i を数体とその素点の集合の組とし、 K_i の最大 S_i 外不分岐拡大を $K_{i,S_i}/K_i$ と書き、そのガロア群を G_{K_i,S_i} と書く。 G_{K_1,S_1} と G_{K_2,S_2} が同型の時 K_1 と K_2 が同型である。」を、各 S_i のディリクレ密度が 0 でない、各 K_i が \mathbb{Q} 上ガロア、 K_1 が総虚、等の仮定の下で証明したのでそれを紹介する。

15:50 – 16:40 **Ildar Gaisin** (the University of Tokyo)

Relative A_{inf} -cohomology

For a proper smooth formal scheme \mathfrak{X} over $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$, Bhatt-Morrow-Scholze constructed a cohomology theory (valued in A_{inf} -modules) which specializes to various p -adic cohomology theories. In this work we construct a relative version of this in the setting $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ is a proper smooth morphism of p -adic formal schemes over $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ and relate it to the q -crystalline/prismatic theory introduced by Bhatt-Scholze. A key player in the relative situation is the use of fibered product of topoi like in the work of Abbes-Gros on the relative Hodge-Tate spectral sequence. This is joint work with Teruhisa Koshikawa.

December 1 (Tue)

10:00 – 10:50 **Yohsuke Matsuzawa** (Brown University)

Vojta's conjecture and arithmetic dynamics

代数多様体の自己射の軌道に関して、整数点の稠密性、各座標のサイズの増大度、座標の primitive prime divisor(原始的素因数) の存在などは数論力学系における重要な問題である。これらの問題は 1 次元の場合はかなり詳細に研究されてきたが、高次元における研究は少なかった。私は最近高次元においてこれらの問題に Vojta 予想が非常に有効に使えることを示した。より一般にこれらの問題に共通して応用できる高さ関数に関する定理/予想を確立したのでそれを紹介したい。

11:10 – 12:00 **Kaoru Sano** (Doshisha University)

Zariski density of points with maximal arithmetic degree

代数体上で定義された射影多様体の自己射の反復合成を一つの力学系とみなす。この力学系において有理点の Weil 高さが漸近的にどのように振る舞うのか、ということが川口-Silverman により問われ、高さの漸近的な指数増大度を測る量である算術次数が導入された。一方で力学系次数と呼ばれる、代数的な力学系の幾何的な複雑さを測る量は古典的によく研究されてき

た。川口-Silverman が Zariski 稠密な軌道を持つ有理点に対しては、算術次数は力学系次数に一致するであろうという予想を立て、松澤により一般に算術次数は力学系次数以下であることが示された。これらに関連して柴田は、松澤の不等式が真の不等式となるような有理点の集合は、固定された代数体上では真の Zariski 閉集合になるであろう、という予想を立てた。これはある意味で川口-Silverman の予想より強いものである。柴田の予想の裏を返せば、算術次数が力学系次数に一致するような点は豊富に存在すると考えられる。実際、一般に算術次数が力学系次数に一致する有理点が Zariski 稠密にあることを代数閉体上で示し、また幾らかの場合には、固定した代数体上で同様のことを示すことに成功した。本講演では、この結果について解説を行う。本研究は柴田崇広氏との共同研究である。

13:30 – 14:20 **Makiko Sasada** (the University of Tokyo)

Geometric Perspectives for Hydrodynamic Limits (Part 1)

14:40 – 15:30 **Kenichi Bannai** (Keio University/Riken)

Geometric Perspectives for Hydrodynamic Limits (Part 2)

流体力学極限は、統計力学の基礎づけとして非常に重要な手法であり、気体の分子の運動などのモデルとなる相互作用しながら確率的に時間発展する大規模相互作用系に対して、そのマクロな時間発展を表す決定論的な偏微分方程式を時空間変数に対するスケール極限による極限定理として導出するものである。従来は確率論的手法が重要な位置を占め、また、実際流体力学極限が証明されている場合は Varadhan らによる戦略に従いつつも、各大規模相互作用系に対して個別な確率論的評価や議論が用いられて証明されて来た。

本講演では講演者の亀谷幸生氏との共著論文 Topological Structures of Large Scale Interacting Systems via Uniform Locality (arXiv:2009.04699 [math.PR]) で導入した、様々な大規模相互作用系を統一的に扱う新しい幾何学的な枠組みについて解説する。特に、大規模相互作用系の根底にある幾何学的構造を解析するために定義した「一様局所コホモロジー」という新しいコホモロジーについて説明する。このコホモロジーは大規模相互作用系の確率論的情報とは独立に純代数的に定義され、モデルのマクロパラメーター、ミクロ系への群作用の振る舞いや流体力学極限で得られる偏微分方程式の拡散行列について、解釈を与える。

Part 1 では、佐々田が流体力学極限の意義と本研究の成果について、非専門家向けに入門的な解説をする。Part 2 では坂内が、一様局所コホモロジーの解釈において、群コホモロジーや幾何学的な考察など、いかに整数論・数論幾何的視点や手法が力を発揮するかについて説明する。この研究は、流体力学極限という一見整数論と全く関係無い研究分野においても、整数論・数論幾何的手法が有用であることを示している。流体力学極限と整数論がより深く結びつく可能性も期待しており、時間が許せばそういう可能性についても述べる。

15:50 – 16:40 **Hohto Bekki** (Keio University)

A new construction of Eisenstein cocycle and the special values of Dedekind zeta functions

The classical Hecke integral formula expresses the Dedekind zeta function of a number field (of degree g) as an integral of the Eisenstein series over a certain torus of $GL(g)$.

In the case where the number field is totally real or totally imaginary, it is known that such an integral formula can be interpreted cohomologically using the so-called Eisenstein cocycle or Shintani cocycle.

The aim of this talk is to present a new formulation in which we can treat all number fields in a uniform way. More precisely, I will explain that by using some ideas and techniques developed in the recent works of Vlasenko-Zagier, Charollois-Dasgupta-Greenberg, and Bannai-Hagihara-Yamada-Yamamoto, we can construct a new Eisenstein cocycle which specializes in a uniform way to the special values of the Dedekind zeta function of general number fields.

December 2 (Wed)

10:00 – 10:50 **Naganori Yamaguchi** (RIMS)

The m -step solvable Grothendieck conjecture for genus 0 curves over finitely generated fields

遠アーベル幾何学において基本的な予想の一つに、代数曲線の Grothendieck 予想がある。この予想は、曲線の数論的基本群から曲線の同型類が完全に復元できるかというものであり、中村、玉川、望月などの先行研究によりおおむね解決に至っている。この問題の類似として、(幾何的) 基本群をその m 次導来商に代えた群から曲線の同型類を復元できるかという問題が考えられ、これは現在 m -step solvable Grothendieck 予想と呼ばれている。先行研究として中村 ($m = 2$ でいくつかの条件を満たす代数体上の種数 0 の曲線)、望月 ($m \geq 5$ で劣 p 進体上の一般の曲線) などがある。今回の公演では、 $m \geq 3$ で素体上有限生成な無限体上の種数 0 の曲線に対する証明を紹介する。

11:10 – 12:00 **Isamu Iwanari*** (Tohoku University)

Tannakian aspects of stable infinity-categories and applications

I would like to talk about higher Tannaka duality theory: I will give a gentle introduction to Tannaka duality for stable infinity-categories. The talk also includes motivating phenomenon, philosophy, perspectives, and applications to algebraic geometry.

12:10 – Meeting of the steering committee (mainly for the committee members)

December 3 (Thu)

11:10 – 12:00 **Masato Kurihara** (Keio University)

Survey on the Brumer-Stark conjecture and the proof by Dasgupta and Kakde

Dasgupta と Kakde による Brumer Stark 予想を完全に解決したというプレプリントが発表されたので、それを背景・応用をこめて解説する。

13:30 – 14:20 **Kazuaki Murakami** (Keio Girls Senior High School / Keio University)

Weak Greenberg's Generalized Conjecture For Imaginary Quadratic Fields

素数 p , 代数体 k に対して, k の最大多重 \mathbb{Z}_p -拡大を \tilde{k} と書く. このとき, R. Greenberg によって, 「 \tilde{k} 上の最大不分岐アーベル pro- p 拡大におけるガロア群 $X_{\tilde{k}}$ は $\mathbb{Z}_p[[\text{Gal}(\tilde{k}/k)]]$ -加群として擬零である」と予想されている. これを一般 Greenberg 予想 (GGC) と呼ぶ. k が総実であるとき, Leopoldt 予想を仮定すれば, GGC は通常の Greenberg 予想 (GC) と一致する. また, K. Wingberg, Nguyen Quang Do によって, GGC の弱い版 「 $X_{\tilde{k}} \neq 0$ のとき, $X_{\tilde{k}}$ は非自明な擬零 $\mathbb{Z}_p[[\text{Gal}(\tilde{k}/k)]]$ -部分加群をもつ」が予想され, これを弱一般 Greenberg 予想 (Weak GGC) と呼ぶ.

本講演では, 奇素数 p , 虚二次体 k に対して, Weak GGC が比較的緩い (反例が見つからないという意味で) 仮定 (i), (ii) のもとで成立することを証明する:

- (i) k のある有限次アーベル拡大体の \mathbb{Z}_p -拡大に付随する岩澤 λ -不変量が 0,
- (ii) k の円分 \mathbb{Z}_p -拡大に付随する p -進 L 関数は平方因子を持たない.

仮定 (i) は, \mathbb{Z}_p -拡大の GC に相当するものである. また, (i) の \mathbb{Z}_p -拡大は明示的に選ぶことができ, 多くの場合, k の p の上にある一方の素イデアルの外不分岐な \mathbb{Z}_p -拡大と一致する.

14:40 – 15:30 **Takenori Kataoka** (Keio University)

Higher codimension behavior in equivariant Iwasawa theory for CM-fields

In classical Iwasawa theory, we mainly study codimension one behavior of Iwasawa modules. Against this background, Bleher-Chinburg-Greenberg-Kakde-Pappas-Sharifi-Taylor started studying codimension two behavior of unramified Iwasawa modules which are assumed to be pseudo-null. In this talk, we propose a new perspective of their works by using the determinant modules of perfect complexes. This enables us to describe the higher codimension behavior, and moreover to extend the results to equivariant settings.

15:50 – 16:40 **Kentaro Nakamura** (Saga University)

Congruences for zeta elements and an application to Iwasawa main conjecture

2018 年度の本研究集会において, 講演者は Hecke 固有カスプ新形式に付随するガロア表現に対して加藤和也氏が構成したゼータ元を階数 2 の普遍ガロア変形に対して拡張する結果についての講演を行った. 今回の講演では, この結果の系として, 合同な保型形式に対してそれぞれ

のゼータ元の間にも合同関係が成り立つということを解説する. さらに, ゼータ元の合同の応用として, 剰余表現が絶対既約かつある種のミュー不変量が消えているという仮定の下で, 任意の2つの合同な保型形式に対して, 片方に対する (p 進 L 関数が現れない) 岩澤主予想の成立が他方に対する予想の成立と同値である, という定理が得られることについても解説する. このような結果は, p で通常還元を持つ合同な楕円曲線同士の場合には Greenberg-Vatsal(2000)により知られており, p で通常な保型形式同士の場合には Emerton-Pollack-Weston(2006)によって知られていた. 今回の結果は, 保型形式の重さやレベルに条件を課す必要はなく, 全ての合同な保型形式に対して適用可能なものである.

December 4 (Fri)

10:00 – 10:50 **Shun Ishii** (RIMS)

The \mathfrak{p} -primary uniform boundedness conjecture for Drinfeld modules

Drinfeld 加群はアーベル多様体の正標数関数体類似であり, その類似に着目して Poonen はアーベル多様体のねじれ点の有限性に関する普遍上界予想の Drinfeld 加群類似を定式化しました. この予想は, 楕円曲線の場合には Mazur や Merel らにより証明されていますが, 楕円曲線の類似である階数 2 の Drinfeld 加群の場合には未解決です. また, 階数が 3 以上の Drinfeld 加群の場合には研究されていませんでした. 本講演では, 有限生成体上の任意の階数の Drinfeld 加群の 1 次元族に対し, 普遍上界予想のある変種を定式化し, その証明を紹介します. この結果は, Cadoret と玉川による有限生成体上のアーベル多様体の 1 次元族の p 冪ねじれ点に関する普遍上界予想の Drinfeld 加群類似です.

11:10 – 12:00 **Momonari Kudo, Shushi Harashita*** (the University of Tokyo, Yokohama National University)

Introduction to computational algebraic geometry - constructing algebraic curves over finite fields with many rational points

計算代数幾何学は, 代数幾何学で現れる様々な対象を計算するアルゴリズムの開発・改良と, コンピューター上への実装を目標としている. 本講演では, そのようなアルゴリズムの中でも特に, 有限体上の代数曲線にまつわる計算技法を取り上げる. 具体的には, Hasse-Witt 行列, Jacobi 多様体間の同種写像, 曲線の同型判定などの計算アルゴリズムを解説するとともに, それらの計算機代数システム上での実装例を紹介する.

応用として, 低種数・小標数における, 有理点を多くもつ有限体上の代数曲線の構成や数え上げについて概説する. 時間があれば, 上記の周辺の話題も幾つか紹介する.

13:30 – 14:20 **Yasuhiro Oki** (the University of Tokyo)

On basic loci of Shimura varieties for spinor groups

Let p be an odd prime number. For a Shimura variety of Hodge type satisfying some conditions at p , Kisin and Pappas constructed an integral model over the integer ring of a p -adic field. Its geometric special fiber is equipped with a Newton stratification, and the

basic locus is defined as a specific Newton stratum. Giving a concrete description of the structure of basic loci is important in the theory of arithmetic intersection. In this talk, we discuss the above question for Shimura varieties for spinor similitude groups whose levels at p are special maximal parahoric. We also mention the same results on the underlying topological spaces of the corresponding Rapoport–Zink spaces.

14:40 – 15:30 **Kazuhiro Ito** (Kyoto University)

Uniform local constancy of étale cohomology of rigid analytic varieties

In this talk, we discuss some ℓ -independence results on local constancy of étale cohomology of rigid analytic varieties. We prove that a closed subscheme of a proper scheme over an algebraically closed complete non-archimedean field has a small open neighborhood in the analytic topology such that, for every prime number ℓ different from the residue characteristic, the closed subscheme and the open neighborhood have the same mod ℓ étale cohomology. The existence of such an open neighborhood for each ℓ was proved by Huber. A key ingredient in the proof is a uniform refinement of a theorem of Orgogozo on the compatibility of the nearby cycles over general bases with base change.

15:50 – 16:40 **Nobuo TSUZUKI** (Tohoku University)

On the minimal slope conjecture of F -isocrystals

K. Kedlaya proposed a problem which asserts that, for two irreducible overconvergent F -isocrystals \mathcal{M}^\dagger and \mathcal{N}^\dagger on a smooth variety over a perfect field of characteristic $p > 0$ admitting slope filtrations as convergent F -isocrystals, if the convergent submodules of minimal slope of \mathcal{M}^\dagger and \mathcal{N}^\dagger are isomorphic to each other, then \mathcal{M}^\dagger is isomorphic to \mathcal{N}^\dagger . This phenomenon is properly p -adic because it relates to the slopes and there is no analogy in ℓ -adic theory.

In this talk we will explain our affirmative solution of the problem for curves over an arbitrary base field and for general varieties over finite fields. The key is to investigate the local and global behaviors of maximal bounded quotient of Frobenius-differential modules in the sense of Dwork.

16:40 – 16:45 Closing

* Invited speakers

Program Committee:

Iwao Kimura (University of Toyama),

Shinichi Kobayashi (Kyushu University),

Takashi Hara (Tsuda University)